

理。最后,给出了定理的证明。

假定 $T < \infty, (\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为完备概率空间, $F = \{F_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ 为满足通常条件的子 σ -代数流, 设 $W = \{W_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ 为一维 F -Brown 运动。设 S^2 为全部一维 F_t -适应连续过程 $\{X_t, t \in [0, T]\}$ 构成的空间, 范数为 $\|X\|_{S^2}^2 = E \sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^2 < \infty$ 。相应地, 设 H^2 为全部一维 F_t -循序可测过程 $\{X_t, t \in [0, T]\}$ 构成的空间, 其范数为 $E \int_0^T |X_t|^2 dt < \infty$, 显然 S^2 和 H^2 都是 Hilbert 空间。接下来介绍一些关于极大单调算子和 Yosida 估计的简单结果。

定义 1 多值映射 $A: X \rightarrow X$ (X 为 Hilbert 空间), 如果 $\forall x_1, x_2 \in \text{Dom}(A), \forall v_i \in A(x_i), i = 1, 2$, 有 $\langle v_1 - v_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0$, 则称 A 是单调的, 其中 $\text{Dom}(A) = \{x \in X: A(x) \neq \emptyset\}$, $Gr(A) = \text{graph}(A) = \{(x, y) \in X \times X: x \in \text{Dom}(A), y \in A(x)\}$ 。当无其它的单调映射 B 使得 $Gr(B)$ 严格包含 $Gr(A)$, 则称 A 为极大单调的。

设 $V: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 为一凸下半连续函数, 令 $\text{Dom}(V) = \{x \in \mathbb{R} | V(x) < +\infty\}$ 和 $\partial V(y) = \{y^* \in \mathbb{R} | \langle y^*, x - y \rangle + V(y) \leq V(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$, 则 $A := \partial V$ 为一极大单调映射。设 $V_n(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{n}{2} |x - y|^2 + V(y) \right\}, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{R}$, 容易验证 V_n 是可导的凸函数, 而且 $V(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n(x), \forall x \in \text{Dom}(A)$ 。 $A_n(x) := \nabla V_n(x) = n(x - J_n(x))$ 称为 $\partial V(x)$ 的 Yosida 估计, 其中 $J_n(x) = (1 + \frac{1}{n} \partial V)^{-1}(x)$, 而且 $A_n(x)$ 还满足: (i) $\forall x \in \mathbb{R}, A_n(x) \in A(J_n(x))$; (ii) $\forall z \in \mathbb{R}$, 存在 $a \in \text{interior}(\text{Dom}(A))$ 及正常数 R, C 使得 $\langle A_n(z), z - a \rangle \geq R |A_n(z)| - C |z| - C, \forall n \in \mathbb{R}$

下面给出方程 (1) 的解的定义。

定义 2 四元组 $\{(X_t, Y_t, Z_t, K_t), t \leq T\}$ 称为方程 (1) 的解, 如果 (X_t, Y_t, Z_t, K_t) 满足

(i) Z_t 是 F_t -循序可测过程, 且 $E \int_0^T |Z_t|^2 dt < \infty$;

(ii) 任意 $t \leq T$, 有

$$\begin{cases} X_t = x + \int_0^t f(s, X_s, Y_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s, t \leq T, \\ Y_t = \xi + \int_t^T h(s, X_s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s + K_T - K_t, t \leq T \end{cases}$$

(iii) K 是绝对连续函数, $K_0 = 0$, 对于任意右

连续循序可测过程 $(\alpha_t, \beta_t) \in Gr(\partial V)$, 有

$$\int_0^T (Y_t - \alpha_t) (dK_t + \beta_t dt) \leq 0$$

(iv) $X \in H^2, Y \in H^2$ 和 $Y_t \in \overline{\text{Dom}(V)}, 0 \leq t \leq T$ 。

我们使用如下假设:

(A₁) $f(t, x, y)$ 关于 y 是递增的, $h(t, x, y, z)$ 关于 x 是递增的, 固定 $(t, \omega), f(t, \omega, \cdot, \cdot), \sigma(t, \omega, \cdot)$ 和 $h(t, \omega, \cdot, \cdot, \cdot)$ 都是连续函数;

(A₂) $\forall x, y, z, t$, 存在常数 C 满足 $|f(t, x, y)| \leq C(1 + |x| + |y|)$ 和 $|h(t, x, y, z)| \leq C(1 + |y| + |z|)$;

(A₃) σ 是 Lipschitz 线性增长, i. e. 存在常数 C 满足 $|\sigma(t, x)| \leq C(1 + |x|)$ 和

$$|\sigma(t, x^1) - \sigma(t, x^2)| \leq C(1 + |x^1 - x^2|)$$

下面给出二个重要引理, 其对解的存在性证明起着重要的作用。

引理 1^[6, lemma 2.1] 设 $f: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ 为一连续线性增长函数, 即存在常数 $K < \infty$, 使得对 $\forall x \in \mathbb{R}^p$, 有 $|f(x)| \leq K(1 + |x|)$ 。令函数序列 $f_n(x) = \inf_{y \in \mathbb{Q}^p} \{f(y) + n(x - y)\}$, 则 f_n 满足

(i) 线性增长: $\forall x \in \mathbb{R}^p, |f_n(x)| \leq K(1 + |x|)$;

(ii) 单调性: $\forall x \in \mathbb{R}^p, f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$;

(iii) Lipschitz: $\forall x, y \in \mathbb{R}^p, |f_n(x) - f_n(y)| \leq n|x - y|$;

(iv) 强收敛性: 如果 $x_n \rightarrow x$, 则 $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$ 。

注意到, 如果我们令 $f_n(x) = - \inf_{y \in \mathbb{Q}^p} \{-f(y) + n(x - y)\}$, 此时 $f_n(x)$ 仍旧满足上面的 (i)、(iii) 和 (iv), 至于单调性就变为单调下降, $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ 。

引理 2^[7, lemma 3.5] 假设 $f^i: [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2$ 为可测函数, 满足

(i) 存在 K , 对任意 $t, \omega, y, z, |f^i(t, \omega, y, z)| \leq K(1 + |y| + |z|), i = 1, 2$;

(ii) f^i 为 F_t 循序可测, 固定 $(t, \omega), f(t, \omega, \cdot, \cdot)$ 是连续的, $i = 1, 2$;

(iii) $\xi^i \in \overline{\text{Dom}(V)}, E(|\xi^i|^2) < \infty$ 和 $EV(\xi^i) < \infty, i = 1, 2$,

此时

$$\begin{cases} dY_t^i + f^i(t, Y_t^i, Z_t^i) dt \in \partial V(Y_t^i) dt + Z_t^i dW_t, t \leq T, \\ Y_T^i = \xi^i \end{cases}$$

分别存在最小解 $\{(\bar{Y}_t^i, \bar{Z}_t^i, \bar{K}_t^i), 0 \leq t \leq T\}, i = 1, 2$, 同时, 如果 $\xi^1 \leq \xi^2$ 和 $f^1(t, y, z) \leq f^2(t, y, z), a$,

身), 容易知道存在下半连续过程 $\{X_t\}$ 和 $\{Y_t\}$ 使得 $X_t := \lim_{k \rightarrow \infty} X_t^k, Y_t := \lim_{k \rightarrow \infty} Y_t^k, \forall t \leq T, P - a. s.$ 。再看序列 (Z^i, K^i) , 对 $|Y_t^k|^2$ 运用 Itô 公式及 h 的线性增长条件, 得到 $E \int_0^T |Z_t^k|^2 dt \leq C_1$ 和 $E \sup_{t \leq T} |Y_t^k|^2 \leq C_1$, 对 $|Y_t^k - Y_t^n|^2$ 再次运用 Itô 公式, 得

$$\begin{aligned} |Y_t^k - Y_t^n|^2 &= 2 \int_t^T (h(s, X_s^{k-1}, Y_s^k, Z_s^k) - \\ &h(s, X_s^{n-1}, Y_s^n, Z_s^n)) (Y_s^k - Y_s^n) ds - \\ &\int_t^T |Z_s^k - Z_s^n|^2 ds - \int_t^T (Y_s^k - Y_s^n) (Z_s^k - Z_s^n) dW_s - \\ &2 \int_t^T (Y_s^k - Y_s^n, d(K_s^k - K_s^n)) \end{aligned}$$

在等式两边取期望, 可得到

$$\begin{aligned} E \int_t^T |Z_s^k - Z_s^n|^2 ds &\leq CE \left(\int_t^T (h(s, X_s^{k-1}, Y_s^k, Z_s^k) - \right. \\ &\left. h(s, X_s^{n-1}, Y_s^n, Z_s^n))^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} E \left(\int_t^T (Y_s^k - Y_s^n)^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

由 $h(s, x, y, z) \leq C(1 + |y| + |z|)$, $Y^k \in S^2, Z^k \in H^2$ 及 $\{Y^k\}$ 的收敛性, 得到 $\{Z^k\}$ 为 H^2 中的 Cauchy

列。与 K_t^i 类似地讨论, 我们可得到 $\int_0^T |A_n(Y_s^{k,n})|^2 ds$

$< \infty, \forall n, k$, 且 $K_t^k := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t A_n(Y_s^{k,n}) ds$, 从而知道

K_t^k 一致收敛到 $K_t := \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t A_n(Y_s^{k,n}) ds$ 。

最后说明 (X, Y, Z, K) 为方程的解。由控制收敛定理, f_n, h_n 强收敛性, BDG 不等式及 σ 的 Lipschitz 性质, 在方程两边取极限可得

$$X_t = x + \int_0^t f(s, X_s, Y_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s,$$

$$Y_t = \xi + \int_t^T h(s, X_s, Y_s, Z_s) ds -$$

$$\int_t^T Z_s dW_s + K_T - K_t, t \leq T$$

类似文 [8] 中的证明过程, 知道 Y, K 满足定义 2 中的 (3) 和 (4)。从而知道 (X, Y, Z, K) 确实是方程的解。

注: 实际上, 当布朗运动 W 取值于 \mathbb{R}^d 上时,

只要函数 $h: [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{1 \times d} \rightarrow \mathbb{R}$ 和 $\sigma: [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times d}$ 满足单调连续条件, 也就是类似 $(A_1) - (A_3)$, 方程 (1) 仍旧存在适应解。

参考文献:

- [1] ANTONELLI F. Backward-forward stochastic differential equations[J]. Ann Appl Probab, 1993, 3:777 - 793.
- [2] MA J, PROTTER P, YONG J. Solving forward-backward stochastic differential equations explicitly a four step scheme[J]. Probab Theory Related Fields, 1994, 98: 339 - 359.
- [3] HU Y, PENG S. Solutions of forward-backward stochastic differential equations[J]. Probab Theory Related Fields, 1995, 103:273 - 283.
- [4] ANTONELLI F, HAMADÈNE S. Existence of the solutions of backward-forward SDE's with continuous monotone coefficients[J]. Stochastic and Probability letters, 2006, 76:1559 - 1569.
- [5] YIN J, SITU R. On the solutions of forward-backward stochastic differential equations with Poission jumps[J]. Stoch Ann Appl, 2003, 21:1419 - 1448.
- [6] LEPELTIER P J, MARTIN SAN J. Backward stochastic differential equations with continuous coefficient[J]. Statistic Probability Letters, 1997, 32:425 - 430.
- [7] ZHANG M. BSDE involving a subdifferential operator with locally non-Lipschitz and continuous monotone coefficients[J]. Stochastic, 2010, 78:213 - 224.
- [8] N'ZI M, OUKNINE Y. Backward stochastic differential equations with jumps involving a subdifferential operator [J]. Random Oper and Stoch Equ, 2000, 8(2): 395 - 426.
- [9] HAMADÈNE S. Backward-forward sde's and stochastic differential games[J]. Stochastic Process Appl, 1997, 77:1 - 15.
- [10] AUBIN P J, CELLINA ARRIGO. Differential inclusions [M]. Berlin: Springer, 1984.
- [11] MA J, YONG J. Forward-backward stochastic differential equations and their applications[M]. Berlin: Springer, 1999.